Corrigé de l'exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$ et $C(1,1,3)$.

1 (a) On a : $\overrightarrow{AB}\,(3-1;-1-2;6-2)$, donc $\overrightarrow{AB}\,(2;-3;4)$

On a : $\overrightarrow{AC}\,(1-1;1-2;3-2)$, donc $\overrightarrow{AC}\,(0;-1;1)$, alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= (-3\times 1-(-1)\times 4)\,\vec{i} - (2\times 1 - 0\times 4)\,\vec{j} + (2\times(-1) - 0\times(-3))\,\vec{k}\\ &= \boxed{\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}}\end{aligned}$$

(b) On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;-2;-2)$ vecteur normal du plan (ABC).

Donc l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit : $x-2y-2z+d=0$.

Puisque $A\in(ABC)$, alors $x_A-2y_A-2z_A+d=0$, donc $1-2\times 2-2\times 2+d=0$, donc $-7+d=0$, donc $d=7$.

D'où : $\boxed{(ABC):\ \ x-2y-2z+7=0}$

2 On a : $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-x\\ 1-y\\ 4-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1-x\\ 1-y\\ 12-z\end{pmatrix}=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (5-x)(-1-x)+(1-y)(1-y)+(4-z)(12-z)=0\\ &\Leftrightarrow -5-5x+x+x^2+(y-1)^2+48-4z-12z+z^2=0\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+(y-1)^2+z^2-16z+43=0\\ &\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)+(y-1)^2+\left(z^2+16z+64\right)+43-4-64=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-8)^2=25\end{aligned}$$

Alors (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R=\sqrt{25}=5$

3 (a) On a : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|1\times 2-2\times 1-2\times 8+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-9|}{\sqrt{9}}$

Donc $\boxed{d(\Omega,(ABC))=\dfrac{9}{3}=3}$

(b) On a : $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=\sqrt{5}$, donc : $d(\Omega,(ABC))<R$

Donc $\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ coupe la sphère } (S) \text{ selon un cercle } (\Gamma) \text{ de rayon } r}$,

où : $r=\sqrt{R^2-d(\Omega;(ABC))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

Corrigé de l'exercice 2 (3 points)

1 (a) Le discriminant Δ de l'équation est : $\Delta=3^2-4\times 3=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Donc l'équation admet deux solutions sont : $\boxed{z_1=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}}$ et $\boxed{z_2=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}}$

b On a : $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

2 On a : $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, alors : $b^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1+i)^2 = \dfrac{2}{4}(1+2i-1) = \dfrac{1}{2}(2i) = \boxed{i}$

3 On a : $h = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$, alors :

$$h^4 + 1 = \cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12} + 1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{a}$$

4 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a Puisque $C(c)$ est l'image de $B(b)$ par la rotation R alors :

$$\begin{aligned} z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_O) &\Leftrightarrow c = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)b \\ &\Leftrightarrow c = (0+i)b \\ &\Leftrightarrow \boxed{c = ib} \end{aligned}$$

b On a $c = ib$, donc $\dfrac{c}{b} = i$, alors $\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \left[1; \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

donc $\begin{cases} OC = OB \\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$, donc $\boxed{\text{le triangle } OBC \text{ est rectangle et isocèle en } O}$

Corrigé de l'exercice 3 (3 points)

1 On a : $card(\Omega) = 6^3 = 216$; $card(A) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

$card(B) = 4^3 = 64$

Donc : $\boxed{p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{36}{216} = \dfrac{1}{6}}$; $\boxed{p(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{64}{216} = \dfrac{8}{27}}$

2 On a : $card(C) = 3 \times (2^2 \times 4^1) = 48$, donc : $\boxed{p(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{48}{216} = \dfrac{2}{9}}$

Corrigé de l'exercice 4 (11 points)

Première partie : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité $1cm$)

1 **a** On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-4} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 + 8 \times 1^2 \times 0 = \boxed{2}$

Donc $\boxed{\text{la droite } y = 2 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe } (C) \text{ au voisinage de } -\infty}$

(b) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}e^{x-4}=e^{-4}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2+8\times(+\infty)\times e^{-4}=\boxed{+\infty}$

Donc $\boxed{\text{la droite } x=0 \text{ est une asymptote verticale à la courbe } (C) \text{ au voisinage de } +\infty}$

2 (a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-4}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2+8\times 1^2\times(+\infty)=\boxed{+\infty}$

(b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, et on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}+8\underbrace{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2}_{1}\underbrace{\frac{e^{x-4}}{x}}_{+\infty}\\&=0+8\times1\times(+\infty)\\&=\boxed{+\infty}\end{aligned}$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}f'(x)&=0+8\times2\left(\frac{x-(x-2)}{x^2}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}\\&=8\times2\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\\&=\frac{8(x-2)(2\times2+x(x-2))e^{x-4}}{x^3}\\&=\boxed{\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}}\end{aligned}$$

(b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$, or $(x-1)^2\geq0$ et $3>0$, alors $(x-1)^2+3>0$, d'où : $\boxed{x^2-2x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}}$.

(c) On a pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2-2x+4>0$ et $e^{x-4}>0$, alors $8(x^2-2x+4)e^{x-4}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\dfrac{x-2}{x^3}$.

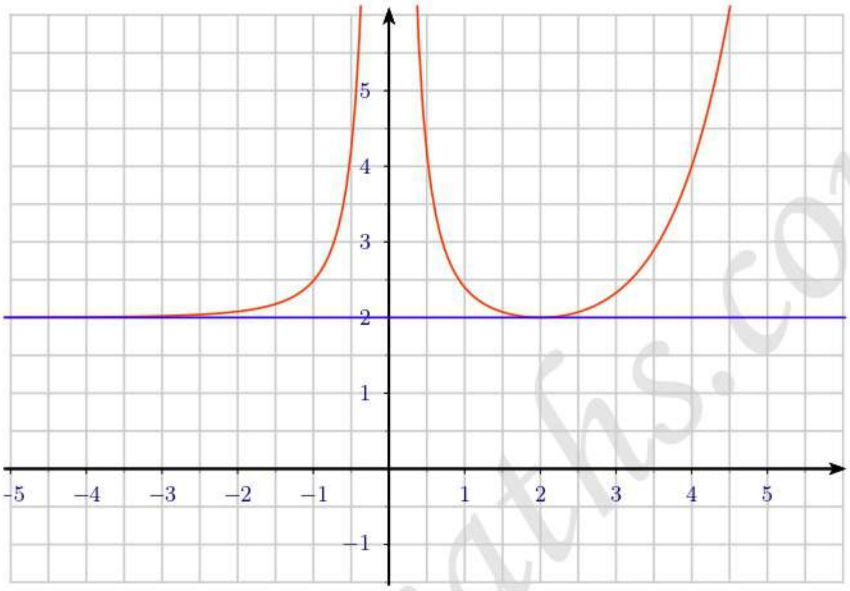
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x^3}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc f est strictement décroissante sur $]0;2]$, et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$.

(d) Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4 La courbe (C).



5 **a** On a H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors H est dérivable sur $[2;4]$, alors :

$$H'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} = \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^{x-4} = \frac{x-1}{x^2}e^{x-4} = h(x)$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } H \text{ est une primitive de la fonction } h \text{ sur } [2,4]}$

b Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = 2 + 8\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right)e^{x-4}$$
$$= 2 + 8\left(1 - 4\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\right)e^{x-4} = \boxed{2 + 8e^{x-4} - 32\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4}}$$

c On a : $\displaystyle\int_2^4 e^{x-4}dx = \left[e^{x-4}\right]_2^4 = e^0 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} = \boxed{\frac{e^2-1}{e^2}}$

d L'aire du domaine plan limité par (C) et l'axe des abscisses et les droite d'équations $x = 2$ et $x = 4$ est :

$$\mathcal{A} = \int_2^4 |f(x)|dx = \int_2^4 f(x)dx \quad ;\text{car } \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) \geq 0$$

$$\mathcal{A} = \int_2^4 2 + 8e^{x-4} - 32\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4}dx = 2\int_2^4 dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 h(x)\,dx$$

$$\mathcal{A} = 2\left[x\right]_2^4 + 8\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - 32\left[H(x)\right]_2^4$$

$$\mathcal{A} = 2(4-2) + 8\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - 32\left(\frac{1}{4}e^{4-4} - \frac{1}{2}e^{2-4}\right)$$
$$\mathcal{A} = 2\times 2 + 8\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2}\right)$$
$$\mathcal{A} = 4 + 8\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - 32\left(\frac{e^2-2}{4e^2}\right)$$
$$\mathcal{A} = 4 + 8\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - 8\left(\frac{e^2-2}{e^2}\right)$$
$$\mathcal{A} = 4 + 8\left(\frac{e^2-1-e^2+2}{e^2}\right)$$
$$\mathcal{A} = 4 + \frac{8}{e^2}$$

Donc : $\boxed{\mathcal{A} = 4 + \frac{8}{e^2} cm^2}$

Deuxième partie :

1 On considère la fonction numérique g définie sur $[2;4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

(a) On a : $g(4) = 8(4-2)e^{4-4} - 4^2 = 8\times 2\times 1 - 16 = 16 - 16 = \boxed{0}$

(b) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2 &= -(x^2-8x-16)e^{x-4} - x^2 + x^2e^{x-4} \\ &= \boxed{-(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)} \end{aligned}$$

(c) • Si $2\le x\le 4$, alors $2-4\le x-4\le 4-4$, alors $-2\le x-4\le 0$, alors $e^{-2}\le e^{x-4}\le e^0$, donc $e^{x-4}\le 1$, d'où $\boxed{e^{x-4}-1\le 0, \quad \forall x\in[2;4]}$

• Pour tout x de $[2;4]$, on a : $e^{x-4}-1>0$ et $e^{x-4}>0$, donc $-(x-1)^2e^{x-4}\le 0$ et $x^2(e^{x-4}-1)\le 0$, donc $-(x-1)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)\le 0$ d'où : $\boxed{g(x)\ge 0, \quad \forall x\in[2;4]}$

2 (a) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} - x \\ &= \left(\frac{x-2}{x^2}\right)\left(\frac{2x^2}{x-2} + 8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3}{x-2}\right) \\ &= \left(\frac{x-2}{x^2}\right)\left(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3-2x^2}{x-2}\right) \\ &= \left(\frac{x-2}{x^2}\right)\left(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^2(x-2)}{x-2}\right) \\ &= \left(\frac{x-2}{x^2}\right)\left(8(x-2)e^{x-4} - x^2\right) \\ &= \boxed{\left(\frac{x-2}{x^2}\right) g(x)} \end{aligned}$$

(b) Pour x de $[2;4]$, on a $x-2\ge 0$, donc $\frac{x-2}{x^2}\ge 0$, or $g(x)\le 0$, alors $\frac{x-2}{x^2}g(x)\le 0$, donc $f(x)-x\le 0$, d'où : $\boxed{f(x)\le x\ ; \quad \forall x\in[2;4]}$

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

(a) Pour $n=0$, on a : $u_0 = 0$, donc $2\le u_0\le 4$.
Supposons que : $2\le u_n\le 4$, et montrons que : $2\le u_{n+1}\le 4$

On a : $2 \leq u_n \leq 4$, donc $f(2) \leq f(u_n) \leq f(4)$, car f est continue et croissante sur $[2;4]$.
Donc : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$, car $f(2) = 2$, et $f(4) = 4$

D'après le principe du raisonnement par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 4}$

(b) D'après la question **2)b)**, on a : $\forall x \in [2;4] : f(x) - x \leq 0$, et puisque : $u_n \in [0;4]$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f(u_n) - u_n \leq 0 &\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minoré par 2.

alors $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

(c) La fonction f est continue et croissante sur $[2,4]$, donc $f([2;4]) = [f(2); f(4)] = [2;4]$ alors $f([2;4]) \subset [2;4]$, or $u_0 \in [2;4]$, et puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le nombre réel ℓ la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\ell - 2}{\ell^2}\right) g(\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell - 2 = 0 \text{ ou } g(\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 2 \text{ ou } \ell = 4 \end{aligned}$$

Puisque la suite (u_n) est décroissante, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_0$, donc $u_n \leq 3$.

Donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$